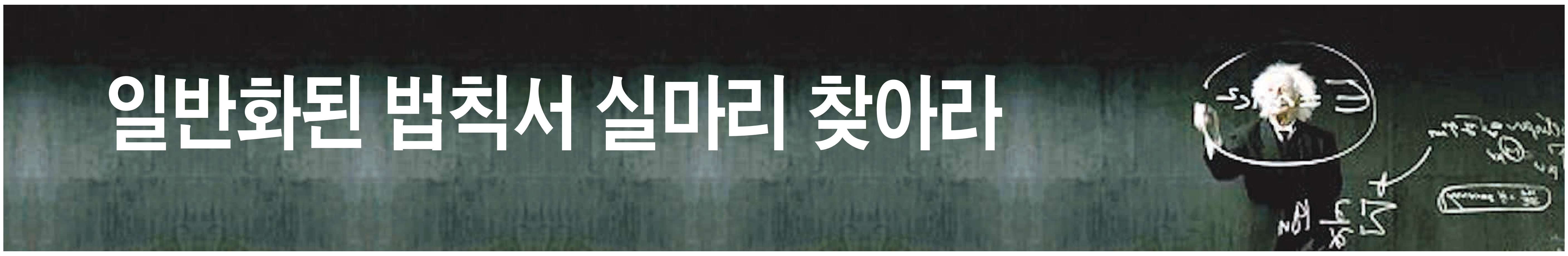
퍼펙트 論述 대수학과 수리 논술

대수학이란 수 대신 문자를 써서 문제 해결을 쉽게 하고, 또 수학적 법칙을 일반적으로 또 간명하게 나타내는 것을 뜻한다. 수나 기타 형식의 사항을 문자로 나타내어, 방정식 등의 문제를 풀거나 사칙연산의 방법 등을 추상화하여 연구하는 수학의 한 분야를 말한다. 오늘날의 대수학은 그것에 그치지 않고 널리 수학 일반의 기초 분야가 된다.



일반화된 법칙서 실마리 찾아라

수학적 법칙 문자로 간명하게 나타낸 추상적 연산구조
기본 정리는 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0 = 0$

이정호 1318 논술연구소 수리논술 강사

바빌로니아, 이집트, 중국, 그리스 등의 고대수학에서는 기호가 사용되지 않고 미지수나 전체적인 계산이 일상 언어만으로 기술되었다. 이후 자주 반복되어 사용된 개념이나 계산을 축약된 용어나 알파벳 머리글자 등의 사용으로 간략히 나타내는 과정을 거쳐 기호를 도입하는 발상에 이르러 문자를 사용하여 방정식의 미지수를 나타내고 나아가 상수도 나타냄으로써 방정식의 일반 해를 생각할 수 있게 되었다. 프랑스의 데카르트 이후의 수학은 수학의 모든 식이나 연산이 일상 언어로부터 독립된 기호적 언어로 표현되는 단계로 나아가게 되었다.

이러한 기호 대수의 발달은 17세기 이후 변수 개념과 함수 개념의 발달에 결정적인 역할을 하였다. 나아가 일반적인 계산 법칙을 표현할 수 있게 되었다. 기호를 중심으로 하는 대수학은 수의 개념을 확장시켰으며 그럴수록 방법들이 일반화되고 응용 범위도 넓어지게 되었다.

자연수 체계는 모든 수 체계에서 가장 기본적이다. 자연수 체계는 셈에는 유용하지만 방정식의 풀이에는 적절하지 못하다. $x+3=0$ 같은 간단한 방정식도 자연수 체계에서는 해결이 불가능하다. 이러한 방정식의 풀이에는 정수 체계가 필요하나 정수 체계도 $3x+5=0$과 같은 간단한 방정식의 풀이도 가능하지 않다. 유리수는 모든 일차 방정식의 풀이에는 적당하지만 $x^2=3$과 같은 이차방정식에는 적당하지 않다. 무리수를 포함한 실수에서도 모든 이차 방정식의 풀이가 가능하지 않다.

이처럼 보다 풍부한 수 체계를 생각할 때마다 풀 수 없는 종류의 방정식을 새로이 발견하고 그것을 해결하기 위해 보다 더 풍부한 수 체계를 고려하는 과정은 복소수 체계에 도달하면 멈추게 된다. 즉 계수 a_k $(k=0,1,2,\cdots,n)$가 복소수인 다음과 같은 임의의 다항 방정식은 복소수 체계에서 해결 가능하다.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

이를 대수학의 기본정리라 한다.

또한 기호 발달은 수학의 절차적인 관점으로부터 구조적인 관점으로의 사고의 전환을 가능하게 하였다. 예를 들어 보면 양의 정수의 집합에서 덧셈과 곱셈의 교환과 결합법칙 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙이 성립하는데 이를 기호화하면 다음과 같다.

1. $a+b=b+a$ 2. $a\times b=b\times a$ 3. $(a+b)+c=a+(b+c)$
4. $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ 5. $a\times(b+c)=(a\times b)+(b\times c)$

이 다섯 명제들은 기호화되어 있기 때문에 연산에 대해 적절한 정의를 부여하면 양의 정수 이 외에 다른 원소의 집합에도 적용할 수 있을 것이다. 즉 다섯 가지 성질의 결과들은 양의 정수에 적용되는 대수학을 형성하지만 다른 많은 체계에도 공통적인 대수적 구조를 형성한다.

이러한 다섯 가지의 기초적인 성질들은 수로만 한정되지 않는 특별한 형태의 대수적인 구조에 대한 공준으로 간주될 수 있으며 이 공준들이 형식적으로 그 속에 포함된 여러 정리들은 위 다섯 가지 성질들을 만족시키는 체계들에 적용시켜 볼 수가 있다.

이제 대수학은 수와 양에 대한 관계만을 탐구하는 영역이 아니라 추상적인 기호와 여러 부호들의 조합과 관계들을 연구하는 학문으로 발전하게 되었다. 그 주된 연구 대상은 군, 환, 체라고 불리는 추상적인 연산구조에 대한 것이다. 이러한 대수학을 추상대수학 또는 현대대수학이라 부른다. 다음과 같은 문제를 살펴보자.

동영상 강의 www.nonsul.1318hi.com

(가) 수학적인 군의 법칙 또는 공리

1. 군은 원소의 집합 G이고, G의 원소들은 서로 결합해서 G의 다른 원소가 된다. 원소 a와 b의 결합은 순서를 고려해서 $a\circ b$로 나타낸다. G의 모든 원소 a와 b에 대해 $a\circ b$가 정의되고 이것은 G에 속한다.

2. G의 모든 원소 a, b, c에 대해 $a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$이다.

3. G에는 항등원 e가 존재해서 G의 모든 원소 a에 대해 $e\circ a=a\circ e=a$이다.

4. G의 각 원소 a에 대해 G에 속하는 역원 a^{-1}이 존재해서 $a\circ a^{-1}=a^{-1}\circ a=e$이다.

(나) 이러한 대수학에 대한 현대적인 관점은 1830년경에 영국에서 '피콕'의 연구와 함께 최초로 어렴풋이 나타나기 시작했다. 그는 자신이 '산술적인 대수학'과 '상징적인 대수학'이라 부른 두 분야 사이의 차이점을 명백히 했다. '피콕'의 '상징적인 대수학'은 보편적인 '산술적인 대수학'이며 두 대수학이 공동의 보조를 맞추면서 진행되는 한 '상징적인 대수학'의 연산들은 '산술적인 대수학'의 연산들과 다른 모든 경우에 '동치형의 영속화의 원리'에 의해 결정된다. 이 원리는 수학에서 하나의 강력한 개념으로 간주되었으며, 복소수 체계의 산술에 대한 초기의 발달과 양의 정수지수에서 좀더 일반적인 종류의 지수로 지수법칙의 확장과 같은 문제에서 역사적으로 중요한 역할을 수행했다.

[주] 동치형의 영속화 원리 - 일반적인 기호로 표현될 때 대수학적으로 동치인 것은 어느 것이든지 이 기호들이 나타내는 어떤 것과도 여전히 동치이어야 한다.

(다) 로바체프스키와 볼리아이가 1829년과1832년에 유클리드의 공준 중의 하나가 성립하진 않지만 똑같이 무모순인 기하학을 창조함으로써 기하학을 유클리드기하학의 굴레로부터 해방시킬 때까지 기하학은 유클리드 기하학에 얽매어 있었다. 이 발견과 함께 단 하나의 기하학만이 존재할 수 있다는 믿음은 산산이 부서지게 되었고 기하학의 다른 많은 체계의 창조를 향한 길이 트였다. 대수학에 대해서도 이와 똑같이 이야기를 할 수 있다. 19세기 초까지도 산술의 통상적인 대수학과 다른 어떤 대수학이 존재할 수 있다고 상상할 수 없었다. 보기를 들면 곱셈에 관한 교환법칙이 성립하지 않는 무모순인 대수학의 구성을 그 당시의 어느 누구도 생각하지 못했다. 공간 분석을 위해 물리학자에게 적절한 대수학을 고안해 내기 위한 노력으로 해밀턴이 곱셈에 관한 교환법칙이 성립되지 않는 대수학을 창조해야만 했던 1843년까지도 대수학에 대한 생각은 이와 같았다.

[논제] 2차 정사각행렬 A에 대해 $A^3+2A-E=O$이 성립할 때, A^2+A+E의 역행렬을 위 지문의 (가)(나)(다)를 참조해서 동치형의 영속화의 원리를 적용해서 구하는 방법을 설명해 보시오.

[해결의 길잡이]

실수들을 그 성분으로 하는 2차 정사각 행렬의 집합은 덧셈에 대해서 닫혀 있고 결합법칙이 성립하고 덧셈에 대한 항등원 O와 역원 $-A$가 존재한다는 사실을 잘 알고 있다.

즉 제시문(가)의 법칙과 공리들을 만족한다. 곱셈에 대해서는 닫혀 있고 결합법칙이 성립하고 곱셈에 대한 항등원인 단위행렬 E가 존재한다. 그러나 각 행렬에 대한 곱셈의 역원인 이 모든 행렬에 대해 존재하지는 않는다. 이 역행렬의 존재조건이 임의의 2차 정사각행렬을 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 라 할 때 $ad=bc$의 값이 0이 아니어야 한다는 것도 잘 알고 있다. 이러한 행렬들을 정칙행렬이라 하자. 여기서 우리는 2차 정사각행렬이 위 제시문 (가)의 군의 수학적인 법칙과 공리들이 정칙행렬로만 이루어진 행렬에 대해서는 덧셈과 곱셈에 대해 적용된다는 것을 알 수 있다. 그러나 이러한 조건만으로는 제시문 (나)의 동치형의 영속화의 원리들을 실수와 정칙행렬로만 이루어진 2차 정사각 행렬에 대해 적용시킬 수는 없다. 대수적인 연산구조를 가지지만 실수들의 연산구조와 동일한 연산법칙이 적용될 수 있다고는 할 수 없다. 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하지 않기 때문이다.

만일 집합 G를 $G=\{mA+nE \mid m, n$은 임의의 정수, $mA+nE$은 정칙행렬$\}$이라 하면 $AE=EA=A$이므로 집합 G에 대해서는 곱셈의 교환법칙이 성립한다는 것을 알 수 있다. 또 임의의 2차 정사각행렬 $T=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대해 $T^2-(a+d)T+(ad-bc)E=O$이라는 케일리-헤밀턴 정리가 성립하므로 A의 거듭제곱꼴은 $mA+nE$의 꼴로 나타낼 수 있다. 위 문제에서 주어진 행렬들은 모두 G의 원소들임을 알 수 있다. 그리고 집합 G에 대해서는 덧셈과 곱셈에 대해 닫혀 있다는 것을 알 수 있고, $m=n=0$일 때는 $mA+nE=O$이고 $m=0$, $n=1$일 때는 $mA+nE=E$이므로 덧셈과 곱셈에 대한 항등원이 존재하고 각원소의 덧셈과 곱셈에 대한 역원이 존재한다.

따라서 위 성질들은 실수의 연산구조와 거의 동일해 보인다. 따라서 동치형의 영속화 원리를 이 집합 G에 적용해 보아 다항방정식문제로 바꾸어서 풀어볼 수 있다.

위 문제를 다항방정식 문제로 바꾸어보면 $x^3+2x-1=0$일 때 $(x^2+x+1)P(x)=1$을 만족하는 가장 간단한 다항식 $P(x)$를 구하는 문제가 된다. 3차항을 상수항과 1차항으로 바꿀 수 있으므로 $P(x)$의 차수는 2차 이하로 볼 수 있다. $P(x)=ax^2+bx+c$라 두면 $(x^2+x+1)(ax^2+bx+c)=ax^4+(a+b)x^3+(a+b+c)x^2+(b+c)x+c=a(-x^2+x)+(a+b)(-2x+1)+(a+b+c)x^2+(b+c)x+c=(b+c-a)x^2+(-a-b+c)x+(a+b+c)=1$을 만족하는 계수 a, b, c를 구하면 되고 이때 $a=\frac{1}{2}$, $b=0$, $c=\frac{1}{2}$이므로 구하는 답은 $\frac{1}{2}A^2+\frac{1}{2}E$이다.

모든 연산구조에 동치영속화의 원리가 맞는다고 할 수는 없으므로 여기서 구한 해가 맞는지 다시 적용해 보면 $(A^2+A+E)(\frac{1}{2}A^2+\frac{1}{2}E)=\frac{1}{2}A^4+\frac{1}{2}A^3+A^2+\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E=\frac{1}{2}A(-2A+E)+\frac{1}{2}(-2A+E)+A^2+\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E=-A^2+\frac{1}{2}A-A+\frac{1}{2}E+A^2+\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E=E$가 되어 위에서 구한 답이 옳음을 알 수 있다.

양의 정수에 적용되는 대수적 구조가 점점 음의 정수 유리수 등으로 확장되어지는 과정을 찾아 볼 수 있다. 이처럼 이미 우리에게 익숙한 대상의 성질들에 적용되는 법칙을 잘 탐구하면 새로운 대상에 대해 그것을 이해할 수 있는 토대가 되고 새로운 것을 찾아가는 착안점이 될 것이다. 이것이 우리가 앞 사람들이 남긴 학문적인 업적을 배우고 탐구하는 이유가 아닐까?

위 문제처럼 고교수학을 잘 살펴보면 실수나 복소수를 대상으로 하지 않는 대수구조가 있다는 것을 알 수 있다. 수학1에 나오는 행렬의 연산이 그 대표적인 예이고 수2에서 벡터의 연산에 대해서도 실수와는 다른 어떤 대상이 대수적인 구조를 갖추고 있음을 알 수 있다. 벡터의 연산은 어떤 점에서 실수구조의 연산과 비슷하고 다른지 고민해 본다면 벡터에 대한 이해가 높아질 수 있을 것이다.